第六章　数　列

6.1 数列的概念

6.2 等差数列

6.3 等比数列

6.4 数列的应用

在某次知识抢答比赛中，出现了这样一道题：观察

1，3，9，27，(　　)，243，

依照规律，说出括号中应该填什么数．你能快速地解答此题吗？

剧场的座位一般是排成圆弧形的，如下图所示．

小张所在的公司要为某剧场定做椅子，已知这个剧场座位的排列规律是：第一排 36 个，以后每一排比前一排多 3 个，共有 7 排．

为了估算这批椅子的成本，小张需要算出这个剧场总共有多少个座位．当然，他可以将这 7 排座位一一列出来，即

36，39，42，45，48，51，54，

然后再逐个相加．但是，有没有更加快捷的算法呢？毕竟，如果座位的排数很多的话，一一列举是非常费时间的，而且容易出错．

以上这两个问题，都跟我们这一章要学习的数列有关．在学完这一章以后，类似的问题你将很快就能解决．

简单地来讲，数列就是一列有顺序的数，数列讨论的是这些数彼此之间的关系以及变化规律．本章我们将首先讨论数列的概念，然后在此基础上研究常见的等差数列和等比数列的性质，最后讨论数列的应用．

6.1 数列的概念

6.1.1 数列的定义

牛年邮票

问题 我国有用十二生肖纪年的习俗，每年都用一种动物来命名，12 年轮回一次．2009 年（农历己丑年）是 21 世纪的第一个牛年，请列出 21 世纪所有牛年的年份．

解 由于 12 年就轮回一次，所以 21 世纪的第二个牛年的年份是

$$2\,009+12=2\,021,$$

21 世纪的第三个牛年的年份是

$$2\,009+12\times 2=2\,033,$$

……

21 世纪的第七个牛年的年份是

$$2\,009+12\times 7=2\,093.$$

把 21 世纪所有牛年的年份排成一列，得到

$$2\,009，2\,021，2\,033，2\,045，2\,057，2\,069，2\,081，2\,093. \quad ①$$

像①这样按一定次序排列的一列数，叫做**数列**．在数列中的每一个数叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项）、第 2 项……第 n 项．比如，2 009 是数列①的第 1 项，2 093 是数列①的第 8 项．

我们还可举出一些数列的例子．例如，大于 3 且小于 11 的自然数排成一列

$$4，5，6，7，8，9，10; \quad ②$$

正整数的倒数排成一列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots; \qquad ③$$

$\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的近似值排成一列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots; \qquad ④$$

-1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…排成一列

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots; \qquad ⑤$$

无穷多个 2 排成一列

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots; \qquad ⑥$$

这些都是数列.

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 例如，上面的数列①②是有穷数列，数列③④⑤⑥是无穷数列.

思考与讨论

你能用电子工作表产生一个无穷数列吗？

探索与研究

使用计算器或计算机产生一列数：

(1) 用函数型计算器随机地产生一列数；

(2) 用电子工作表任意产生一列数；

(3) 用电子工作表产生一列数：21 世纪中所有虎年的年份.

练习

A 组

1. 已知数列 $\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{15}$，…，则 $3\sqrt{3}$ 是它的第____项.

2. 已知数列 $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n},\ \cdots$，那么它的第 10 项为（　　）.

(A) -1　　(B) 1　　(C) $-\frac{1}{10}$　　(D) $\frac{1}{10}$

B 组

试用电子工作表解答 A 组中的问题.

6.1.2 数列的通项

数列从第 1 项开始，按顺序与正整数对应. 所以数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，叫做**数列的通项**，n 叫做 a_n 的序号，并且整个数列可记作 $\{a_n\}$.

如果 a_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）与 n 之间的关系可用

$$a_n=f(n)$$

来表示，那么这个关系式叫做这个数列的**通项公式**，其中 n 的所有取值是正整数集的一个子集. 由此可知，数列的通项可以看成以正整数集的子集为定义域的函数.

结合课件 601，学习数列的通项公式.

例如，数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$ 可记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，其通项公式为

$$a_n=\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}_+.$$

如果数列通项的定义域是正整数集，定义域通常略去不写. 如果已知一个数列的通项公式，则可依次用限定的正整数 1，2，3，…去代替公式中的 n，就可求出数列中的各项.

例1 根据通项公式，求出下面数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$；　　　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，得到数列的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，得到数列的前 5 项为

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5.$$

例2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 1，3，5，7；

(2) $\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$；

(3) $-\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{2\cdot 3}$，$-\frac{1}{3\cdot 4}$，$\frac{1}{4\cdot 5}$.

解 (1) 数列的前 4 项 1，3，5，7 都是序号的 2 倍减 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n-1;$$

(2) 数列前 4 项$\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$的分母都等于序号加 1，分子都等于分母的平方减 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项$-\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{2\cdot 3}$，$-\frac{1}{3\cdot 4}$，$\frac{1}{4\cdot 5}$的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

例3 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 1，以后各项由公式

$$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}\quad(n\geqslant 2)$$

给出，写出这个数列的前 5 项.

解 $a_1=1$，

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

递推公式在计算机科学中是非常有用的，因为计算机利用递推来计算时可有效地减少运算次数.

例 3 中的数列表达式，表达的是任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} 之间的关系（其中 $n\geqslant 2$）. 这样的关系式叫做数列的**递推公式**. 如果给出数列的第 1 项或前几项，由数列的递推公式同样可给出整个数列，它是给出数列的另一种方法.

探索与研究

使用电子工作表解答上面的例 1 和例 3.

练习

A 组

1. 一个数列的前 4 项分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$，…，则它的一个通项公式是__________.

2. 已知数列 $a_n=n^2-2n+3$，则 $a_{10}=$ __________.

B 组

1. 数列 $\frac{2^3-1}{2}$，$\frac{3^3-1}{3}$，$\frac{4^3-1}{4}$，$\frac{5^3-1}{5}$，…的一个通项公式是(　　).

(A) $a_n=\frac{n(n^2-1)}{n+1}$　　(B) $a_n=\frac{n(n^2+1)}{n}$

(C) $a_n=\frac{n(n^2+3n+3)}{n+1}$　　(D) $a_n=\frac{n(n^2+2)}{n}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1\,981$，且 $a_n=a_{n-1}+12$，$n\geqslant 2$，写出这个数列的前 5 项.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=2\,009$，且 $a_n=a_{n-1}+7$，$n\geqslant 2$. 求 a_1.

习　题

1. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n = n^3$；　　(2) $a_n = 5(-1)^{n+1}$.

2. 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的第 7 项和第 10 项：

(1) $a_n = \frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n = n(n+2)$；

(3) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$；　　(4) $a_n = -2^n + 3$.

3. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2，4，6，8；　　(2) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$.

4. 观察下列数列的特点，用适当的数填空：

(1) 2，4，(　)，8，10，(　)，14；

(2) 2，4，(　)，16，32，(　)，128；

(3) (　)，4，9，16，25，(　)，49.

5. 写出一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 3，6，9，12；　　(2) 0，-2，-4，-6；

(3) $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$；　　(4) 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$.

6. 已知无穷数列 1×2，2×3，3×4，4×5，…，$n(n+1)$，…：

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项，第 48 项；

(2) 420 是这个数列的第几项？

7. 写出下面数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项：

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$；

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$；

(3) $a_1=3$，$a_2=6$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$；

(4) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

6.2 等差数列

6.2.1 等差数列的概念

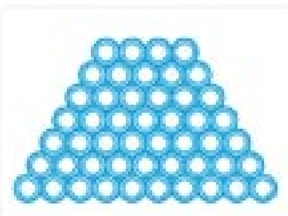

图 6-1

问题 某工厂的仓库里堆放着一批钢管（图 6-1），共堆放了 7 层，试从上至下列出每层钢管的数量.

分析 由图 6-1 可知，相邻的两层钢管中，下面一层堆放的钢管数比上面一层多 1，所以可从上至下列出每层钢管数为

$$4，5，6，7，8，9，10.$$

考察上面的数列，我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 1.

一般地，如果一个数列从它的第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，则这个数列叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 来表示. 例如，数列

$$1，3，5，7，\cdots，2n-1，\cdots$$

就是等差数列，它的公差 $d=2$.

特别地，数列

$$2，2，2，2，\cdots$$

也是等差数列，它的公差为 0. 公差为 0 的数列叫做**常数列**.

已知一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，如何算出它的任意项 a_n 呢？我们由等差数列的定义知道，

$a_2=a_1+d$，

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$,

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$,

……

由此可知，首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可表示为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

结合课件 602，学习等差数列.

根据这个通项公式，如果已知首项与公差，就可算出等差数列的任意项 a_n. 例如，如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到这个数列的通项公式

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2,$$

即这个数列的第 n 项为 $a_n=2n-1$.

事实上，在等差数列通项公式中，共有四个变量，知道其中三个，就可求出第四个.

例1 求等差数列 8，5，2，…的通项公式和第 20 项.

解 因为 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，所以这个等差数列的通项公式是

$$a_n=8+(n-1)\times(-3),$$

即 $a_n=-3n+11$. 所以

$$a_{20}=-3\times 20+11=-49.$$

例2 等差数列 $-5,-9,-13,\cdots$ 第多少项是 -401?

解 因为

$a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，$a_n=-401$，

所以

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得 $n=100$.

即这个数列的第 100 项是 -401.

例3 在 3 与 7 之间插入一个数 A，使 3，A，7 成等差数列. 求 A 的值.

解 因为 3，A，7 成等差数列，所以 $A-3=7-A$，即 $2A=3+7$.

解得 $A=5$.

一般地，如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

从例 3 知，5 是 3 与 7 的等差中项.

如果 A 是 a，b 的等差中项，则

$$A-a=b-A,$$

解得 $A=\frac{a+b}{2}$.

这就表明，两个数的等差中项就是它们的算术平均值.

容易看出，在等差数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…中，

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2},$$

$$a_3=\frac{a_2+a_4}{2},$$

……

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

……

这就是说，**在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.**

例4 已知一个等差数列的第 3 项是 5，第 8 项是 20，求它的第 25 项.

解 因为 $a_3=5$，$a_8=20$，根据通项公式，得

$$\begin{cases}a_1+(3-1)d=5\\a_1+(8-1)d=20\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+7d=20\end{cases}$$

解此方程组，得 $a_1=-1$，$d=3$.

所以

$$a_{25}=-1+(25-1)\times 3=71.$$

例5 梯子的最高一级宽是 33 cm，最低一级宽是

89 cm，中间还有 7 级，各级的宽度成等差数列，求中间各级的宽度.

解 用 $\{a_n\}$ 表示题中的等差数列. 已知

$$a_1 = 33,\ a_n = 89,\ n = 9,$$

则 $a_9 = 33 + (9-1)d$，即

$$89 = 33 + 8d,$$

解得 $d = 7$.

于是

$$a_2 = 33 + 7 = 40,$$
$$a_3 = 40 + 7 = 47,$$
$$a_4 = 47 + 7 = 54,$$
$$a_5 = 54 + 7 = 61,$$
$$a_6 = 61 + 7 = 68,$$
$$a_7 = 68 + 7 = 75,$$
$$a_8 = 75 + 7 = 82.$$

即梯子中间各级的宽度从上到下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm.

例6 已知一个直角三角形的三条边的长度成等差数列，求证：它们的比是 3∶4∶5.

分析 当已知三个数成等差数列时，可将这三个数表示为

$$a-d,\ a,\ a+d,$$

其中 d 是公差. 由于这样表示具有对称性，运算时往往容易化简. 这样表示后，可根据勾股定理得出它们之间的关系.

证明 设这个直角三角形的三边长分别为

$$a-d,\ a,\ a+d.$$

根据勾股定理，得

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2,$$

解得 $a = 4d$.

于是这个直角三角形的三边长是 $3d$，$4d$，$5d$，即这个直角三角形三条边长的比是 3∶4∶5.

练习

A 组

1. (1) 求等差数列 3，7，11，…的第 7 项；

(2) 求等差数列 10，8，6，…的第 20 项.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；

(2) $a_1=12$，$a_6=27$，求 d.

3. 求下列各组数的等差中项：

(1) 732 与 -136；　　(2) $\frac{49}{2}$ 与 42.

B 组

1. 求等差数列 2，9，16，… 的第 n 项.

2. 求等差数列 0，$-\frac{7}{2}$，… 的第 $n+1$ 项.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 n.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=10$，$a_5=6$，求 a_8 和 d.

6.2.2 等差数列的前 n 项和

问题 求出 6.2.1 节问题中堆放的那批钢管的总数.

分析 怎样求得钢管总数呢？显然，把各层钢管数直接相加就可得出结果.

下面我们用另外一个办法来求.

把图 6-1 上下倒置后放在旁边，得到图 6-2，我们发现新“钢管堆”共有 7 层，每一层的钢管数相等，都等于 14，总数即为 14×7，新“钢管堆”中钢管总数是原来那批钢管总数的两倍，所以问题中的钢管总数为新

“钢管堆”中钢管总数的一半.

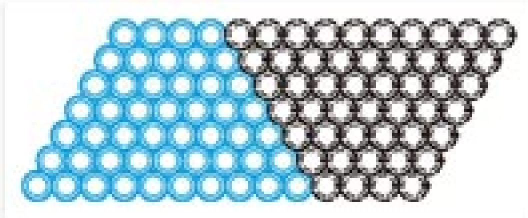

图 6-2

解 用 S_7 来表示钢管的总数，则

$$S_7 = 4+5+6+7+8+9+10; \quad ①$$

把上式右边各项的次序反过来，S_7 又可写成

$$S_7 = 10+9+8+7+6+5+4. \quad ②$$

把①②两式上下对应项相加，我们发现其和都等于 14，所以把①②的两边分别相加，得

$$2S_7=(4+10)\times 7,$$

$$S_7=\frac{(4+10)\times 7}{2},$$

$$S_7=49.$$

由例 2 我们可以总结出求任一等差数列各项和的算法：**等差数列各项的和等于首末两项的和乘项数除以 2.**

一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记作 S_n，即

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

可以得到等差数列前 n 项和公式

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

知识延伸

等差数列前 n 项和公式的推导

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + \cdots + [a_1+(n-1)d]; \quad ③$$

再把各项次序反过来，S_n 又可写成

$$S_n = a_n + (a_n-d) + \cdots + [a_n-(n-1)d]. \quad ④$$

把③④两边分别相加，得

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n个(a_1+a_n)}$$
$$= n(a_1+a_n).$$

上式两边同时除以 2 即可得 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n = na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

在这两个公式中，都包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.

例1 如图 6-3 所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比下面一层多放一支，最上面放有 120 支，这个 V 形架上共放有多少支铅笔?

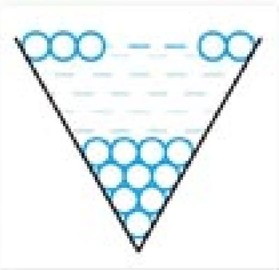

图 6-3

解 由题意可知，这个 V 形架上共放 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$d=1$，$a_{120}=120$.

易知 $n=120$，根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7\ 260.$$

即 V 形架上共放有 7 260 支铅笔.

例2 在小于 100 的正整数的集合中，有多少个数是 7 的倍数？并求它们的和.

解 在小于 100 的正整数的集合中，以下各数是 7 的倍数

$$7，7\times2，7\times3，\cdots，7\times14.$$

即 7，14，21，…，98.

显然，这个数列是一个等差数列，其中 $a_1=7$，$d=7$，它的项数为小于 $\dfrac{100}{7}$ 的最大整数值，即 $n=14$，于是 $a_{14}=98$.

因此

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

即在小于100的正整数的集合中，有14个数是7的倍数，它们的和等于735.

例3 在等差数列-5，-1，3，7，…中，前多少项的和是345?

解 由已知得

$$a_1=-5，d=-1-(-5)=4，S_n=345.$$

根据等差数列前n项和公式得

$$345=-5n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4,$$

整理得$2n^2-7n-345=0$. 因式分解得

$$(n-15)(2n+23)=0.$$

解得$n_1=15$，$n_2=-\frac{23}{2}$（不合题意，舍去）.

所以$n=15$.

即这个等差数列的前15项的和是345.

练习

A组

1. 根据下列各题条件，求相应等差数列$\{a_n\}$的S_n：

(1) $a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；

(2) $a_1=100$，$d=-2$，$n=50$；

(3) $a_1=\frac{2}{3}$，$a_n=-\frac{3}{2}$，$n=14$；

(4) $a_1=14.5$，$d=0.7$，$a_n=32$.

2. (1) 求由正整数从小到大排列构成的数列中前1 000个数的和；

(2) 求由正整数从小到大排列构成的数列中前500个偶数的和.

3. 在等差数列-4，1，6，11，…中，前多少项的和是77?

B 组

1. 在 7 与 35 之间插入 6 个数，使它们与已知的两个数成等差数列. 求这 6 个数.

2. 有多少个三位正整数是 6 的倍数？求它们的和.

习　题

1. (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 5.6，第 6 项是 20.6，求它的第 4 项；
   (2) 一个等差数列第 3 项是 9，第 9 项是 3，求它的第 12 项.

2. 求下列各组数的等差中项：
   (1) 647 与 895；　　(2) -180 与 360.

3. 正整数集合中有多少个三位数？求它们的和.

4. 求等差数列 10，7，4，…，-47 各项的和.

5. 根据下列条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的有关未知数：
   (1) $a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，求 d 和 n；
   (2) $d=\frac{1}{3}$，$n=37$，$S_n=629$，求 a_1 和 a_n；
   (3) $a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求 n 和 a_n；
   (4) $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求 a_1 和 S_n.

6. 三个数成等差数列，它们的和等于 18，平方和等于 116，求这个数列.

7. 已知一个等差数列的首项为 -20，第 50 项为 120，求它的前 50 项的和.

8. 求由正整数从小到大排列构成的数列中，前 $2n$ 个奇数的和.

9. 在 -5 和 16 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成的是和为 88 的等差数列，求公差 d.

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_2=-6$，$a_{n-1}+a_n=26$，$S_n=50$，求 n 的值.

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列的概念

问题 小明做折纸游戏，把一张纸连续对折 5 次，试列出每次对折后纸的层数.

解 通过动手操作可得：

第 1 次对折后纸的层数是 $1\times 2=2$；

第 2 次对折后纸的层数是 $2\times 2=4$；

第 3 次对折后纸的层数是 $4\times 2=8$；

第 4 次对折后纸的层数是 $8\times 2=16$；

第 5 次对折后纸的层数是 $16\times 2=32$.

所以可列出折纸的层数是

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前面一项的比都等于常数 2.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，则这个数列叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**. 公比通常用字母 q 表示. 例如，数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32}$$

就是一个等比数列，它的公比是 $-\frac{1}{2}$.

因为在一个等比数列里，从第 2 项起每一项与它前一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前一项乘

公比．这就是说，如果等比数列 a_1，a_2，a_3，a_4，… 的公比是 q ($q\neq 0$)，那么

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
……

由此可知，等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}.}$$

其中，a_1 与 q 均不为 0.

结合课件 603，学习等比数列.

例1 已知一个等比数列的首项为 1，公比为 -1，求这个数列的第 10 项.

解 记这个数列为 $\{a_n\}$，公比为 q，则

$$a_1=1,\ q=-1.$$

由等比数列的通项公式可知

$$a_{10}=a_1q^9=1\times(-1)^9=-1.$$

即第 10 项为 -1.

例2 一个等比数列的第 3 项和第 4 项分别是 12 和 18，求它的第 1 项和第 2 项.

解 设这个数列的第 1 项是 a_1，公比是 q，则

$$a_1q^2=12, \quad ①$$
$$a_1q^3=18. \quad ②$$

解①②所组成的方程组，得

$$q=\frac{3}{2},\ a_1=\frac{16}{3},\ a_2=a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8.$$

即这个数列的第 1 项是 $\frac{16}{3}$，第 2 项是 8.

例3 将 20，50，100 三个数分别加上相同的常数，使这三个数依次成等比数列，求它的公比 q.

解 设所加常数为 a，依题意 $20+a$，$50+a$，$100+a$ 成等比数列，则

$$\frac{50+a}{20+a}=\frac{100+a}{50+a},$$

去分母，得 $(50+a)^2=(20+a)(100+a)$，即

$$2\,500+100a+a^2=2\,000+120a+a^2,$$

解得 $a=25$.

代入计算，得

$$\frac{50+a}{20+a}=\frac{50+25}{20+25}=\frac{5}{3},$$

所以公比 $q=\frac{5}{3}$.

如果在 2 与 8 中间插入一个数 4，那么 2，4，8 这三个数成等比数列.

一般地，如果 a，G，b 成等比数列，则 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**.

例如，由 2，4，8 是等比数列知，4 是 2 与 8 的等比中项. 实际上，-4 也是 2 与 8 的等比中项，因为 2，-4，8 也是等比数列.

如果 G 是 a 与 b 的等比中项，那么 $\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，则

$$G^2=ab，即 G=\pm\sqrt{ab}.$$

容易看出，**一个等比数列从第 2 项起，每一项（有穷等比数列的末项除外）是它的前一项与后一项的等比中项.**

练习

A 组

1. 求下列等比数列的第 4 项和第 8 项：

(1) 5，-15，45，…； (2) 1.2，2.4，4.8，…；

(3) $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，…； (4) $\sqrt{2}$，1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，….

2. (1) 一个等比数列的第 9 项是 $\frac{4}{9}$，公比是 $-\frac{1}{3}$，求它的第 1 项；

(2) 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，求它的第 1 项和第 4 项.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的 $a_2=2$，$a_5=54$，求 q.

4. 求下列各组数的等比中项：

(1) 2 与 18；　　　　(2) 16 与 4.

B 组

1. 一个等比数列的第 2 项是 3，第 3 项是 9，求它的第 1 项和第 4 项.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=1$，末项 $a_n=256$，公比 $q=2$，求这个等比数列的项数.

3. 在 8 与 200 之间插入 3 个数，使 5 个数成等比数列，求这 3 个数.

6.3.2 等比数列的前 n 项和

问题　怎样求等比数列

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\cdots$$

的前 n 项和 S_n?

很显然，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

当 $q\neq 1$ 时，可推得

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.}$$

知识延伸

等比数列前 n 项和公式的推导

因为

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}, \qquad ①$$

而且我们知道，把等比数列的任意一项乘公比，就可得到它后面相邻的一项，现将①式的两边分别乘公比 q，得到

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \qquad ②$$

比较①②两式，我们看到①式的右边从第 2 项到最后一项，与②式的右边的第 1 项到倒数第 2 项完全相同. 于是将①式的两边分别减去②式的两边，可以消去相同的项，得到

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

当 $q\neq 1$ 时，$1-q\neq 0$，上式两边同时除以 $1-q$ 即可得出

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

等比数列前 n 项和的公式，包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个.

例1 求等比数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\cdots$ 的前 8 项的和.

解 因为

$$a_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},\ n=8,$$

所以

$$S_8=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}.$$

例2 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=-\frac{1}{3}$，前 4 项的和为$\frac{5}{9}$，求这个等比数列的首项.

解 根据等比数列前 n 项和公式及已知条件可得

$$\frac{5}{9}=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)},$$

解得 $a_1=\frac{3}{4}$.

即首项为$\frac{3}{4}$.

探索与研究

使用电子工作表解答上面的例 1，并验证例 2 的结果.

练习

A 组

1. 根据下列各组条件，求相应的等比数列 $\{a_n\}$ 的 S_n：

(1) $a_1=3$, $q=2$, $n=6$；　　(2) $a_1=8$, $q=\frac{1}{2}$, $n=5$.

2. 求等比数列 1, 2, 4,… 从第 5 项到第 10 项的和.

B 组

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$, $a_1=36$, $a_5=\frac{9}{4}$, 求 q 和 S_5.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$, $a_n=1\ 296$, $q=6$, $S_n=1\ 554$, 求 n 和 a_1.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，如果 $a_7-a_5=a_6+a_5=48$, 求 a_1, q 和 S_{10}.

习　题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_4=27$, $q=-3$, 求 a_7；　　(2) $a_2=18$, $a_4=8$, 求 a_1 及 q.

2. 求下列各组数的等比中项：

(1) 45 与 80；　　(2) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$.

3. 在 9 与 243 之间插入两个数，使这 4 个数成等比数列，求插入的数.

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) $a_1=-1.5$, $a_4=96$, 求 q 和 S_4；

(2) $q=\frac{1}{2}$, $S_5=\frac{31}{8}$, 求 a_1 和 a_5.

5. 三个数成等比数列，它们的和等于 14，积等于 64，求这个数列.

6. 求 $(2-3\times5^{-1})+(2^2-3\times5^{-2})+\cdots+(2^n-3\times5^{-n})$ 的值.

6.4 数列的应用

在科学研究与工农业生产中，经常会碰到等差数列与等比数列. 下面举例说明它们的应用.

例1 某林场计划造林 0.5 km^2，以后每年比上一年多造林 0.1 km^2，问 6 年后林场共造林多少?

解 依题意，林场每年造林数成等差数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=0.5$，$d=0.1$，$n=6$.

所以

$$\begin{aligned}S_6&=0.5\times 6+\frac{6\times(6-1)}{2}\times 0.1\\&=4.5.\end{aligned}$$

即 6 年后林场共造林 4.5 km^2.

例2 某种电子产品自投放市场以来，经过三次降价，单价由原来的 174 元降到 58 元，这种产品平均每次降价的百分率大约是多少?（精确到 1%）

解 设平均每次降价的百分率是 x，则每次降价后的单价是降价前的 $(1-x)$ 倍. 这样，将原单价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列，记为 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=174,\ a_4=58,\ n=4,\ q=1-x.$$

由等比数列的通项公式，得

$$58=174\times(1-x)^{4-1}.$$

整理，得

$$(1-x)^3=\frac{1}{3},$$

$$1-x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx 0.693.$$

因此

$$x \approx 1-0.693 \approx 31\%,$$

即上述电子产品平均每次降价的百分率大约是 31%.

例3 一对夫妇为了 5 年后能购买一辆车，准备每年到银行去存一笔钱. 假设银行储蓄年利率为 5%，按复利计算，为了使 5 年后本利和共有 10 万元，问他们每年约需存多少钱?（精确到 1 元）

复利是指经过一段时间（例如一年），将所生的利息和本金一起做为本金，再计算利息.

解 设每年他们存入 x 元，一年后存的本利和为

$$x(1+5\%),$$

两年后的本利和为

$$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2,$$

……

5 年后的本利和为

$$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2+\cdots+x(1+5\%)^5.$$

依题意，列方程得

$$x(1+5\%)+x(1+5\%)^2+\cdots+x(1+5\%)^5=100\ 000.$$

即 $1.05x\times\dfrac{1.05^5-1}{1.05-1}=100\ 000.$

解此方程，得 $x\approx 17\ 236$ 元.

所以，他们每年约需存入 17 236 元.

习　题

1. 下面是全国统一鞋号中，成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是 cm）：

$$21,\ 21\frac{1}{2},\ 22,\ 22\frac{1}{2},\ 23,\ 23\frac{1}{2},\ 24,\ 24\frac{1}{2},\ 25.$$

这些尺码是否成等差数列? 如果是，公差是多少?

2. 全国统一鞋号中，成年男鞋共 14 种尺码，这 14 种尺码成等差数列，其中最小尺码是 $23\frac{1}{2}$ cm，公差为 $\frac{1}{2}$ cm，把全部尺码从小到大列出.

3. 在通常情况下，从地面到 10 000 m 高空，每增加 1 km，气温就下降

某一固定数值. 如果 1 km 高度的气温是8.5 ℃，5 km 高度的气温是 -17.5 ℃，求 2 km，4 km 及8 km高度的气温.

4. 安装在一根公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，且最大和最小的皮带轮的直径分别是 216 mm 与 120 mm，求中间三个皮带轮的直径.

5. 一个剧场，设置了 20 排座位，第一排有 38 个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位，这个剧场一共设置了多少个座位?

6. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面的一层铺了 21 块瓦片，往下每层均比上一层多铺一块，斜面上铺了 19 层瓦片，这个斜面上共铺瓦片多少块?

7. 某林场计划第 1 年造林 2 km^2，以后每一年比前一年多造林 5%，第 5 年造林多少?（保留两位小数）

8. 某种细菌在培养过程中，每 30 min 分裂一次（一个分裂为两个），经过 4 h，一个这种细菌可分裂成多少个?

9. 某家庭打算用 10 年时间储蓄 20 万元购置一套商品房，为此每年需存入银行额数相同的专款. 假设年利率为 4%，按复利计算，问每年应存入银行多少钱?（精确到 1 元）

10. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 和 45，求其余各齿轮的齿数.

11. 抽气机的活塞每运动一次，从容器里抽出$\frac{1}{8}$的空气，因而使容器里的空气的压强降低为原来的$\frac{7}{8}$. 已知最初容器里的压强是 101.3 kPa，求活塞运动 5 次后，容器里空气的压强.（保留一位小数）

12. 一个工厂今年生产某种机器 1 080 台，计划到后年，把产量提高到每年生产 1 920 台，如果每一年比上一年增长的百分率相同，这个百分率是多少?（精确到 0.1%）

复习与提问

学完本章后，通过复习与回顾，你应当能够回答下列问题：

1. 什么是数列？

2. 什么是数列的通项公式？

3. 什么样的数列是等差数列？如何求等差数列的通项及它的前 n 项和？

4. 什么样的数列是等比数列？如何求等比数列的通项及它的前 n 项和？

5. 什么是两数 a,b 的等差中项、等比中项？如何求 a,b 的等差中项和等比中项？

6. 等比数列和等差数列在你所学习的专业里有哪些应用？

阅读材料

数列趣题

在我国古代数学著作中，对数列作了大量的研究，很早就建立了正确的等差数列的理论. 早在《周髀算经》中就已有了数列的运用. 例如，在天文数学上曾以直径 2×(19 832 里 200 步) 递进“七衡”(日、月运行的圆周，用七个同心圆表示)；二十四节气以 9 寸 $9\frac{1}{6}$ 分递为加减等等. 在《九章算术》中，给出了等差数列问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺. 问日织几何?” 早在《庄子·天下》中就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的论述，这都是有名的关于等比数列的例子.

古人常常把生活中的一些趣闻编成数学题目，以提高人们对数学的兴趣. 下面我们来看几个这样的题目.

“耗子穿墙”（《九章算术》）

“今有垣厚5尺，两鼠相对．大鼠日一尺，小鼠亦一尺．大鼠日自倍，小鼠日自半．问几何日相逢？各穿几何？”

九章算术的作者将这个问题变为“盈不足术”问题，“盈”为“多余”．“亏”为“不足”．这实际上是一个等比数列求和的问题．这个题的解法也很简单．答案是两天不足，三天有余．请同学自己完成．

如果将墙厚改为100尺，答案就不是一眼能看出的．这个问题实际上是一个等比数列求和问题．小鼠第一天打1尺，接下去无论打多少天也超不过1尺．我们要计算的只是大鼠的情况．设等比数列$\{a_n\}$为

$$1,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots.$$

解不等式

$$S_{n-1}<100-1\leqslant S_n$$

就可以得出答案．

《张邱建算经》题

“今有女善织，日益功疾．初日织五尺，今一月，织九匹三丈．问日益几何？”该题的大意是说，有一女子很会织布，一天比一天织得快，而且每天增加的长度都是一样的．已知第一天织了五尺，一个月后共织布390尺，问该女子织布每天增加多少？这是一道利用等差数列求和公式求解的题，答案是$5\frac{15}{29}$寸．

我国古代数学家在数列方面的成就是很高的，这里就不一一列举了，仅介绍杨辉在《详解九章算法》中给出的三个高阶等差数列求和公式：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+[a+(n-1)]^2$$
$$=\frac{n}{6}(6a^2+6an-6a+2n^2-3n+1);$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

后来，宋代沈括对数列继续进行研究，以上这三个公式只是沈括的一个公式的特例．由此可见我国古代数学成就之高．